

О СИНТЕЗЕ СХЕМ ИЗ НЕНАДЕЖНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В P_4 ¹**Аннотация.**

Актуальность и цель. В современной технике и математике в подавляющем большинстве случаев используется двузначная логика. Это исторически сложившееся положение предопределено ее сравнительной простотой и сделало ее применение предпочтительным (в сравнении с другими логическими системами) с технической и экономической точек зрения. Основные модельные объекты, работающие на основе двузначной логики (например, схемы из ненадежных элементов, неветвящиеся программы) на данный момент являются хорошо изученными. Однако сложность решаемых задач, а следовательно, и технических устройств постоянно возрастает. Многозначная логика предоставляет более широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях. Она позволяет уменьшить как вычислительную сложность, так и размеры, число соединений в различных арифметико-логических устройствах, повысить плотность размещения элементов на схемах, найти альтернативные методы решения задач. Уже сейчас многозначная логика с успехом применяется при решении многих задач и во множестве технических разработок. Среди них различные арифметические устройства, системы искусственного интеллекта и обработки данных, обработка сложных цифровых сигналов и т.д. Определенный интерес представляет задача исследования надежности функционирования схем в полном конечном базисе из k -значных функций ($k \geq 3$). Задача построения надежных схем в произвольном полном базисе из трехзначных функций (т.е. при $k = 3$) решена в диссертации О. Ю. Барсуковой. Цель этой статьи – выявить свойства четырехзначных функций, схемы которых можно использовать для повышения надежности исходных схем, и описать соответствующий метод синтеза.

Результаты. Выявлены свойства функций, схемы которых можно использовать для повышения надежности исходных схем и описан соответствующий метод синтеза. Получены верхняя и нижняя оценки для числа таких функций.

Вывод. Свойства трехзначных функций, схемы которых можно использовать для повышения надежности исходных схем, можно обобщить на четырехзначные функции.

Ключевые слова: функции четырехзначной логики, ненадежные функциональные элементы, синтез схем из ненадежных элементов.

М. А. Alekhina, S. P. Kargin

ON SYNTHESIS OF UNRELIABLE ELEMENT CIRCUITS IN P_4 **Abstract.**

Background. In modern engineering and mathematics in a majority of cases scientists use bivalent logic. Such historically established situation is predetermined by its relative simplicity, and thus this system is more preferable to be applied (in comparison with other logical systems) from engineering and economic points of view. Main model subjects functioning on the basis of bivalent logic (for example, unreli-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-00273.

able element systems, nonbranching programs) are quite sufficiently examined at the moment. However, the complexity of problems to be solved and, therefore, technical devices is constantly rising. Polyvalent logic offers broader opportunities to develop various algorithms in many fields. It allows to decrease computational complexity, as well as sizes, numbers of links in various arithmetic-logical devices, to increase density of element placement in circuits, to find alternative solutions of problems. By this time polyvalent logic has been successfully implemented for solving multiple problems and in many engineering developments. Among such there are various arithmetic devices, AI and data-processing systems, devices for complex digital signal processing etc. Of special interest is a problem of researching functioning reliability of circuits in a complete finite basis consisting of k -valued functions ($k \geq 3$). The problem of building reliable circuits in a random complete basis consisting of three-valued functions (i.e. $k = 3$) was solved in the thesis by O. Yu. Barsukova. The aim of this article is to reveal properties of four-valued functions, the circuits of which may be used for reliability increase of initial circuits, and to describe the corresponding method of synthesis.

Results. The authors revealed the properties of functions, the circuits of which may be used for reliability increase of initial circuits, and described the corresponding method of synthesis. The researchers obtained the upper and lower values for a number of such functions.

Conclusions. The properties of three-valued functions, the circuits of which may be used for reliability increase of initial circuits, may be generalized to four-valued functions.

Key words: four-valued logic functions, unreliable functional elements, synthesis of unreliable element circuits.

Введение

В современной технике и математике в подавляющем большинстве случаев используется двужначная логика. Это исторически сложившееся положение предопределено ее сравнительной простотой и сделало ее применение предпочтительным (в сравнении с другими логическими системами) с технической и экономической точек зрения. Основные модельные объекты, работающие на основе двужначной логики (например, схемы из ненадежных элементов [1, 2, 3], неветвящиеся программы [4]) на данный момент являются хорошо изученными. Однако сложность решаемых задач, а следовательно, и технических устройств постоянно возрастает.

Многозначная логика предоставляет более широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях. Она позволяет уменьшить как вычислительную сложность, так и размеры, число соединений в различных арифметико-логических устройствах, повысить плотность размещения элементов на схемах, найти альтернативные методы решения задач.

Уже сейчас многозначная логика с успехом применяется при решении многих задач и во множестве технических разработок. Среди них различные арифметические устройства, системы искусственного интеллекта и обработки данных, обработка сложных цифровых сигналов и т.д.

В работе [5] описан функционально полный в P_3 базис, в котором на компромиссной основе согласованы математические и технические (МДП-техники) требования и интересы; а также рассмотрены некоторые аспекты

синтеза электронных схем в этом базисе. В работе [6] построен функционально полный в P_4 базис, реализуемый в МОП-структурах.

Таким образом, определенный интерес представляет задача исследования надежности функционирования схем в полном конечном базисе из k -значных функций ($k \geq 3$). Задача построения надежных схем в произвольном полном базисе из трехзначных функций (т. е. $k = 3$) решена в диссертации О. Ю. Барсуковой [7].

Цель данной статьи – выявить свойства четырехзначных функций, схемы которых можно использовать для повышения надежности исходных схем, и описать соответствующий метод синтеза.

1. Основные понятия, определения

Пусть $n \in N$, а P_4 – множество всех функций четырехзначной логики, т.е. функций $f(x_1, \dots, x_n): \{0, 1, 2, 3\}^n \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$. Рассмотрим реализацию функций из множества P_4 схемами из ненадежных функциональных элементов в произвольном полном конечном базисе B .

Будем считать, что схема из ненадежных элементов реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ ($\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n$ при отсутствии неисправностей в схеме на ее выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$.

Предполагается, что все базисные элементы ненадежны, переходят в неисправные состояния независимо друг от друга, а сами неисправности могут быть произвольными (например, инверсными или константными).

Пусть схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, $\tilde{a}^n$ – произвольный входной набор схемы S , $f(\tilde{a}^n) = \tau$. Обозначим через $P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n)$ вероятность появления ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$. Ясно, что $P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) = P_{\tau+1}(S, \tilde{a}^n) + P_{\tau+2}(S, \tilde{a}^n) + P_{\tau+3}(S, \tilde{a}^n)$. Отметим, что в выражениях $\tau+1$, $\tau+2$ и $\tau+3$ сложение осуществляется по mod 4.

Например, если входной набор $\tilde{a}^n$ схемы S такой, что $f(\tilde{a}^n) = 0$, то вероятность ошибки на этом наборе равна

$$P_{f(\tilde{a}^n) \neq 0}(S, \tilde{a}^n) = P_1(S, \tilde{a}^n) + P_2(S, \tilde{a}^n) + P_3(S, \tilde{a}^n).$$

Ненадежностью схемы S будем называть число

$$P(S) = \max \{P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n)\},$$

где максимум берется по всем входным наборам $\tilde{a}^n$ схемы S . Надежность схемы S равна $1 - P(S)$.

2. Специальный класс функций

Пусть базисные элементы независимо друг от друга переходят в неисправные состояния, а неисправности могут быть произвольными.

Пусть $\tilde{\alpha}^m, \tilde{\beta}^m$ – некоторые наборы с компонентами из множества $\{0,1,2,3\}$ длины m ($m \geq 3$). Обозначим через $\rho(\tilde{\alpha}^m, \tilde{\beta}^m)$ число координат, в которых наборы $\tilde{\alpha}^m$ и $\tilde{\beta}^m$ различаются.

Например, если $\tilde{\alpha}^4 = (0102), \tilde{\beta}^4 = (3101)$, то $\rho(\tilde{\alpha}^4, \tilde{\beta}^4) = 2$.

Пусть функция $g(\tilde{x}^m)$ обладает следующими свойствами одновременно: существуют такие наборы $\tilde{\alpha}^m, \tilde{\beta}^m, \tilde{\gamma}^m, \tilde{\delta}^m$, что:

- 1) значения $g(\tilde{\alpha}^m), g(\tilde{\beta}^m), g(\tilde{\gamma}^m), g(\tilde{\delta}^m)$ попарно различны;
- 2а) для любого набора $\tilde{\alpha}_1^m$ ($\rho(\tilde{\alpha}^m, \tilde{\alpha}_1^m) \leq 1$) верно $g(\tilde{\alpha}_1^m) = g(\tilde{\alpha}^m)$;
- 2б) для любого набора $\tilde{\beta}_1^m$ ($\rho(\tilde{\beta}^m, \tilde{\beta}_1^m) \leq 1$) верно $g(\tilde{\beta}_1^m) = g(\tilde{\beta}^m)$;
- 2в) для любого набора $\tilde{\gamma}_1^m$ ($\rho(\tilde{\gamma}^m, \tilde{\gamma}_1^m) \leq 1$) верно $g(\tilde{\gamma}_1^m) = g(\tilde{\gamma}^m)$;
- 2г) для любого набора $\tilde{\delta}_1^m$ ($\rho(\tilde{\delta}^m, \tilde{\delta}_1^m) \leq 1$) верно $g(\tilde{\delta}_1^m) = g(\tilde{\delta}^m)$.

Наборы $\tilde{\alpha}^m, \tilde{\beta}^m, \tilde{\gamma}^m, \tilde{\delta}^m$ будем называть *характеристическими* наборами функции $g(\tilde{x}^m)$.

Замечание 1. Если $\tilde{\alpha}^m, \tilde{\beta}^m, \tilde{\gamma}^m, \tilde{\delta}^m$ – характеристические наборы функции $g(\tilde{x}^m)$, то любые два из них (различные) отличаются не менее чем в трех координатах.

Обозначим через G_m множество функций $g(\tilde{x}^m)$ с перечисленными свойствами. Пусть $G = \bigcup_{m=3}^{\infty} G_m$.

Пример. Нетрудно проверить, что

- 1) функция $g_1(\tilde{x}^3) = \max \{ \max \{ \min(x_1, x_2), \min(x_1, x_3) \}, \min(x_2, x_3) \} \in G$, а ее характеристические наборы (000), (111), (222) и (333);
- 2) функция $g_2(\tilde{x}^4) = \max \{ \min(x_1, x_2), \min(x_3, x_4) \} \in G$, а (0000), (1111), (2222) и (3333) – ее характеристические наборы;
- 3) функция $g_3(\tilde{x}^3) = x_1 + x_2 + x_3 \pmod{4} \notin G$.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что если четырехзначная функция $g \in G$, то функция g' , получаемая из нее сужением на P_3 , обладает свойствами (1) и (2а)–(2в), т.е. трехзначная функция $g' \in G$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Утверждение 1. При всех $m \geq 3$ верно неравенство

$$11 \cdot 4^m - 27m^2 + 9m - 6 \geq 0.$$

Доказательство проведем методом индукции по числу m . Обозначим через $h(m) = 11 \cdot 4^m - 27m^2 + 9m - 6$.

Основание индукции: $m = 3$. Имеем $h(3) = 11 \cdot 4^3 - 27(3)^2 + 9 \cdot 3 - 6 = 482$.

Допустим, утверждение верно для всех $m' \leq m$. Докажем его для $m + 1$:

$$\begin{aligned}
 h(m+1) &= 11 \cdot 4^{m+1} - 27(m+1)^2 + 9(m+1) - 6 = 4 \cdot 11 \cdot 4^m - 4 \cdot 27m^2 + \\
 &+ 3 \cdot 27m^2 - 27(2m+1) + 4 \cdot 9m - 3 \cdot 9m + 9 - 4 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = \\
 &= 4 \cdot (11 \cdot 4^m - 27m^2 + 9m - 6) + 81m^2 - 27(2m+1) - 3 \cdot 9m + 9 + 3 \cdot 6 = \\
 &= 4 \cdot (11 \cdot 4^m - 27m^2 + 9m - 6) + 81m^2 - 81m = \\
 &= 4 \cdot (11 \cdot 4^m - 27m^2 + 9m - 6) + 81m(m-1) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Теорема 1. Для числа $|G_m|$ функций в множестве G_m справедливо неравенство

$$4^{4^m-8m-4} - 4^{4^m-9m-4}(27m^2 - 9m + 6) \leq |G_m| \leq 4^{4^m-8m-4}.$$

Доказательство. Пусть функция $g(\tilde{x}^m) \in G_m$. Характеристический набор $\tilde{\alpha}^m$, на котором $g(\tilde{\alpha}^m) = 0$, можно выбрать 4^m способами. Характеристический набор $\tilde{\beta}^m$, на котором $g(\tilde{\beta}^m) = 1$, можно выбрать не более чем 4^m способами; аналогично набор $\tilde{\gamma}^m$, на котором $g(\tilde{\gamma}^m) = 2$, также можно выбрать не более чем 4^m способами; набор $\tilde{\delta}^m$, на котором $g(\tilde{\delta}^m) = 3$, также можно выбрать не более чем 4^m способами

Пусть характеристические наборы $\tilde{\alpha}^m, \tilde{\beta}^m, \tilde{\gamma}^m, \tilde{\delta}^m$ известны. Тогда известны значения функции $g(\tilde{x}^m)$ на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\alpha}^m$ (таких наборов $3m$); на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\beta}^m$ (таких наборов $3m$); на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\gamma}^m$ (таких наборов $3m$); на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\delta}^m$ (таких наборов $3m$). Остальные $g(\tilde{x}^m)$ могут быть любыми из множества $\{0, 1, 2, 3\}$. Поэтому

$$|G_m| \leq 4^m \cdot 4^m \cdot 4^m \cdot 4^m \cdot 4^{4^m-12m-4} = 4^{4^m-8m-4}.$$

Оценим снизу $|G_m|$. Ясно, что характеристический набор $\tilde{\alpha}^m$, на котором $g(\tilde{\alpha}^m) = 0$, можно выбрать 4^m способами. Количество наборов, отличных от набора $\tilde{\alpha}^m$ не более чем одной координатой, равно $3m+1$. Наборы, отличные от набора $\tilde{\alpha}^m$ ровно в двух координатах (их число равно $C_m^2 \cdot 9 = 4,5m(m-1)$) также не могут быть выбраны в качестве $\tilde{\beta}^m$ (см. замечание 1). Тогда набор $\tilde{\beta}^m$ можно выбрать не менее чем $4^m - (3m+1 + 4,5m(m-1)) = 4^m - (4,5m^2 - 1,5m + 1)$ способами. Как и для набора $\tilde{\alpha}^m$, для набора $\tilde{\beta}^m$ число наборов, отличных не более чем в двух координатах, равно $4,5m(m-1)$. Поэтому его можно выбрать не менее чем $4^m - 2(4,5m^2 - 1,5m + 1)$. Для набора $\tilde{\gamma}^m$ число наборов, отличных не более чем в двух ко-

ординатах, также равно $4,5m(m-1)$. Поэтому его можно выбрать не менее чем $4^m - 3(4,5m^2 - 1,5m + 1)$. Тогда набор $\tilde{\delta}^m$ можно выбрать не менее чем $4^m - 3(4,5m^2 - 1,5m + 1)$ способами.

Таким образом, после выбора характеристических наборов $12m + 4$ значения функции $g(\tilde{x}^m)$ известны, а остальные $4^m - 12m - 4$ значений функции $g(\tilde{x}^m)$ могут быть любыми из множества $\{0, 1, 2, 3\}$. Поэтому

$$\begin{aligned} |G_m| &\geq 4^{4^m - 12m - 4} 4^m (4^m - (4,5m^2 - 1,5m + 1))(4^m - 2(4,5m^2 - 1,5m + 1)) \times \\ &\times (4^m - 3(4,5m^2 - 1,5m + 1)) = 4^{4^m - 11m - 4} (4^{3m} - 6(4,5m^2 - 1,5m + 1)4^{2m} + \\ &+ (4,5m^2 - 1,5m + 1)^2 (11 \cdot 4^m - 6(4,5m^2 - 1,5m + 1))). \end{aligned}$$

Из утверждения 1 верно неравенство $11 \cdot 4^m - 27m^2 + 9m - 6 \geq 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |G_m| &\geq 4^{4^m - 11m - 4} (4^{3m} - 6(4,5m^2 - 1,5m + 1)4^{2m}) = \\ &= 4^{4^m - 8m - 4} - 4^{4^m - 9m - 4} (27m^2 - 9m + 6). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Лемма 1 [8]. При всех $p \in [0, 1]$ и $m \geq 3$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=2}^m C_m^i p^i \leq (2^m - m - 1)p^2.$$

Теорема 2. Предположим, что любую функцию из P_4 можно реализовать схемой с ненадежностью не больше p . Пусть схема S_g реализует функцию $g(\tilde{x}^m) \in G$ с ненадежностью $P(S_g)$, причем v^0, v^1, v^2, v^3 – вероятности ошибок схемы S_g на характеристических наборах $\tilde{\alpha}^m, \tilde{\beta}^m, \tilde{\gamma}^m, \tilde{\delta}^m$ соответственно и $g(\tilde{\alpha}^m) = 0, g(\tilde{\beta}^m) = 1, g(\tilde{\gamma}^m) = 2, g(\tilde{\delta}^m) = 3$. Тогда произвольную функцию f можно реализовать такой схемой A , что

$$P(A) \leq \max\{v^0, v^1, v^2\} + mpP(S_g) + (2^m - m - 1)p^2.$$

Доказательство. Пусть функция $g(\tilde{x}^m) \in G$ имеет характеристические наборы $\tilde{\alpha}^m, \tilde{\beta}^m, \tilde{\gamma}^m, \tilde{\delta}^m$. Пусть схема S_g реализует функцию g с ненадежностью $P(S_g)$, причем v^0, v^1, v^2, v^3 – вероятности ошибок схемы S_g на характеристических наборах $\tilde{\alpha}^m, \tilde{\beta}^m, \tilde{\gamma}^m, \tilde{\delta}^m$ соответственно и $g(\tilde{\alpha}^m) = 0, g(\tilde{\beta}^m) = 1, g(\tilde{\gamma}^m) = 2, g(\tilde{\delta}^m) = 3$.

Пусть f – произвольная функция из P_4 . Без ограничения общности можно считать, что функция f зависит от переменных $x_1, \dots, x_n$, т.е. $f = f(\tilde{x}^n)$, а функции $\varphi_i(y)$ ($i \in \{1, \dots, m\}$) определяются формулами

$$\varphi_i(y) = \begin{cases} \alpha_i, & y = 0; \\ \beta_i, & y = 1; \\ \gamma_i, & y = 2; \\ \delta_i, & y = 3. \end{cases}$$

По условию теоремы каждую из функций $\varphi_i(f(\tilde{x}^n))$ можно реализовать схемой Φ_i , ненадежность которой $P(\Phi_i) \leq p$.

Возьмем схемы $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ и соединим их выходы со входами схемы S_g . Построенную схему обозначим через A . Проверим, что схема A реализует функцию f .

Действительно, пусть на входы схемы A поступает такой набор $\tilde{a}^n$, что $f(\tilde{a}^n) = 0$. Тогда при отсутствии неисправностей во всех схемах Φ_i на входы схемы S_g поступит набор $\tilde{\alpha}^m$. При отсутствии неисправностей в схеме S_g на ее выходе появится значение $g(\tilde{\alpha}^m) = 0$, т.е. значение на выходе схемы A равно 0 и равно $f(\tilde{a}^n)$.

Пусть на входы схемы A поступает такой набор $\tilde{a}^n$, что $f(\tilde{a}^n) = 1$. Тогда при отсутствии неисправностей во всех схемах Φ_i на входы схемы S_g поступит набор $\tilde{\beta}^m$. При отсутствии неисправностей в схеме S_g на ее выходе появится значение $g(\tilde{\beta}^m) = 1$, т.е. значение на выходе схемы A равно 1 и равно $f(\tilde{a}^n)$.

Пусть на входы схемы A поступает такой набор $\tilde{a}^n$, что $f(\tilde{a}^n) = 2$. Тогда при отсутствии неисправностей во всех схемах Φ_i на входы схемы S_g поступит набор $\tilde{\gamma}^m$. При отсутствии неисправностей в схеме S_g на ее выходе появится значение $g(\tilde{\gamma}^m) = 2$, т.е. значение на выходе схемы A равно 2 и равно $f(\tilde{a}^n)$.

Пусть на входы схемы A поступает такой набор $\tilde{a}^n$, что $f(\tilde{a}^n) = 3$. Тогда при отсутствии неисправностей во всех схемах Φ_i на входы схемы S_g поступит набор $\tilde{\delta}^m$. При отсутствии неисправностей в схеме S_g на ее выходе появится значение $g(\tilde{\delta}^m) = 3$, т.е. значение на выходе схемы A равно 3 и равно $f(\tilde{a}^n)$.

Таким образом, во всех случаях при поступлении на входы схемы A набора $\tilde{a}^n$ и отсутствии неисправностей в ней на выходе схемы A появляется значение $f(\tilde{a}^n)$, т.е. схема A реализует функцию f .

Вычислим вероятности ошибок на выходе схемы A .

1. Пусть входной набор $\tilde{a}^n$ таков, что $f(\tilde{a}^n)=0$. Вероятность $P_{f(\tilde{a}^n) \neq 0}(A, \tilde{a}^n)$ ошибки (появления 1, 2 или 3) на выходе схемы A в этом случае удовлетворяет неравенству

$$P_{f(\tilde{a}^n) \neq 0}(A, \tilde{a}^n) \leq v^0 + mpP(S_g) + \sum_{i=2}^m C_m^i p^i,$$

где v^0 – вероятность появления 1, 2 или 3 на выходе схемы S_g при поступлении на ее входы набора $\tilde{\alpha}^m$.

По лемме 1 верно неравенство $\sum_{i=2}^m C_m^i p^i (1-p)^{m-i} \leq (2^m - m - 1)p^2$. Следовательно,

$$P_{f(\tilde{a}^n) \neq 0}(A, \tilde{a}^n) \leq v^0 + mpP(S_g) + (2^m - m - 1)p^2. \quad (1)$$

Аналогично вычисляются вероятности ошибок на других входных наборах схемы A .

2. Пусть входной набор $\tilde{b}^n$ таков, что $f(\tilde{b}^n)=1$. Вероятность появления ошибки на выходе схемы A при входном наборе $\tilde{b}^n$ удовлетворяет неравенству

$$P_{f(\tilde{b}^n) \neq 1}(A, \tilde{b}^n) \leq v^1 + mpP(S_g) + (2^m - m - 1)p^2, \quad (2)$$

где v^1 – вероятность появления ошибки (т.е. появления 0, 2 или 3) на выходе схемы S_g при входном наборе $\tilde{\beta}^m$.

3. Пусть входной набор $\tilde{c}^n$ таков, что $f(\tilde{c}^n)=2$. Вероятность появления ошибки на выходе схемы A при входном наборе $\tilde{c}^n$ вычисляется аналогично и удовлетворяет неравенству

$$P_{f(\tilde{c}^n) \neq 2}(A, \tilde{c}^n) \leq v^2 + mpP(S_g) + (2^m - m - 1)p^2, \quad (3)$$

где v^2 – вероятность появления ошибки на выходе схемы S_g при входном наборе $\tilde{\gamma}^m$.

4. Пусть входной набор $\tilde{d}^n$ таков, что $f(\tilde{d}^n)=3$. Вероятность появления ошибки на выходе схемы A при входном наборе $\tilde{d}^n$ вычисляется аналогично и удовлетворяет неравенству

$$P_{f(\tilde{d}^n) \neq 3}(A, \tilde{d}^n) \leq v^3 + mpP(S_g) + (2^m - m - 1)p^2, \quad (4)$$

где v^3 – вероятность появления ошибки на выходе схемы S_g при входном наборе $\tilde{\delta}^m$.

Из неравенств (1)–(4) следует утверждение теоремы:

$$P(A) \leq \max\{v^0, v^1, v^2\} + mpP(S_g) + (2^m - m - 1)p^2.$$

Теорема 2 доказана.

Таким образом, получены следующие результаты:

1. Выявлены свойства функций, схемы которых можно использовать для повышения надежности исходных схем (теорема 2) и описан соответствующий метод синтеза.

2. Получены верхняя и нижняя оценки для числа таких функций (теорема 1).

Список литературы

1. **Васин, А. В.** О базисах, в которых асимптотически оптимальные схемы функционируют с надежностью 5ε / А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 64–79.
2. **Алехина, М. А.** О надежности схем из ненадежных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина // Дискретная математика. – 1993. – Т. 5, № 2. – С. 59–74.
3. **Alekhina, M. A.** Synthesis and complexity of asymptotically optimal circuits with unreliable gates / M. A. Alekhina // Fundamenta Informaticae, 2010. – № 104 (3). – P. 219–225.
4. **Грабовская, С. М.** О надежности неветвящихся программ с ненадежным оператором условной остановки в произвольном полном конечном базисе / С. М. Грабовская // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 3 (19). – С. 52–60.
5. **Виноградов, Ю. А.** О синтезе трехзначных МДП-схем / Ю. А. Виноградов // Математические вопросы кибернетики : сб. ст. – Вып. 3. – М. : Наука, 1991. – С. 187–198.
6. **Виноградов, Ю. А.** О синтезе четырехзначных квазикомплементарных МОП-схем / Ю. А. Виноградов // Математические вопросы кибернетики : сб. ст. – Вып. 8. – М. : Наука, 1999. – С. 298–300.
7. **Барсукова, О. Ю.** Синтез надежных схем, реализующих функции двузначной и трехзначной логики : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Барсукова О. Ю. – Пенза, 2014. – 87 с.
8. **Алехина, М. А.** О надежности схем, реализующих функции трехзначной логики / М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова // Дискретный анализ и исследование операций. – 2014. – № 21 (4). – С. 12–24.

References

1. Vasin A. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2010, no. 1 (13), pp. 64–79.
2. Alekhina M. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 1993, vol. 5, no. 2, pp. 59–74.

3. Alekhina M. A. *Fundamenta Informaticae* [Fundamental informatics]. 2010, no. 104 (3), pp. 219–225.
 4. Grabovskaya S. M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2011, no. 3 (19), pp. 52–60.
 5. Vinogradov Yu. A. *Matematicheskie voprosy kibernetiki: sb. st.* [Mathematical problems of cybernetics: collected papers]. Issue 3. Moscow: Nauka, 1991, pp. 187–198.
 6. Vinogradov Yu. A. *Matematicheskie voprosy kibernetiki: sb. st.* [Mathematical problems of cybernetics: collected papers]. Issue 8. Moscow: Nauka, 1999, pp. 298–300.
 7. Barsukova O. Yu. *Sintez nadezhnykh skhem, realizuyushchikh funktsii dvuznachnoy i trekhznachnoy logik: dis. kand. fiz.-mat. nauk* [Synthesis of reliable circuits realizing the functions of bivalent and ternary logic: dissertation to apply for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences]. Penza, 2014, 87 p.
 8. Alekhina M. A., Barsukova O. Yu. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy* [Discrete analysis and research of operations]. 2014, no. 21 (4), pp. 12–24.
-

Алехина Марина Анатольевна

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующая кафедрой
дискретной математики, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: alekhina@pnzgu.ru

Alekhina Marina Anatol'evna

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of discrete mathematics, Penza State
University (40 Krasnaya street, Penza,
Russia)

Каргин Степан Павлович

студент, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: dm@pnzgu.ru

Kargin Stepan Pavlovich

Student, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 519.718

Алехина, М. А.

О синтезе схем из ненадежных элементов в P_4 / М. А. Алехина, С. П. Каргин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 4 (32). – С. 47–56.